

Grundpraktikum M9 Reversionspendel

Julien Kluge

22. Juni 2015

Student: Julien Kluge [REDACTED]

Partner: [REDACTED]

Betreuer: Dr. Peter Schäfer

Raum: 316

Messplatz: 2

Das Protokoll enthält viele Fehler.
Du solltest hier nicht reingucken...

Inhaltsverzeichnis

1	Abstract	1
2	Versuchsdurchführung/-Erklärung	2
2.1	Übersichtsmessung	2
2.2	Präzessionsmessung	2
2.3	Amplitudenmessung	2
3	Fehlerberechnung/Messauswertung	2
3.1	Bestimmung des Schneideabstandes/reduzierte Pendellänge	2
3.2	Übersichtsmessung	3
3.3	Präzessionsmessung	3
3.4	Amplitudenmessung	5
3.5	Berechnung der Erdbeschleunigung	6
4	Fehler-/Ergebniseinschätzung	6
5	Anlagen/Aufgenommene Messwerte	7
5.1	Transkribierte Werte	7
5.2	Messprotokoll	8
6	Quellen	8

1 Abstract

Ziel dieses Versuches war es, die Erdbeschleunigung g mithilfe eines Reversionspendels zu bestimmen. Dies ist sehr genau möglich, da lediglich die reduzierte Pendellänge l_r und die Periodendauer T genau gemessen werden mussten, was über eine Präzessionsmessung erfolgte. Das Ergebnis kann mit den Korrekturtermen für die Auftriebskraft und die Winkelauslenkung präziser gemacht werden. Mit den Messwerten ergab sich so der Wert für die Erdbeschleunigung zu:

- $g \approx (9.814 \pm 0.001) \text{m/s}^2$

runden nach DIN1333 - Stelle nach 1

2 Versuchsdurchführung/-Erklärung

2.1 Übersichtsmessung

Wie der Name bereits suggeriert, wurde zu Anfangs eine grobe Übersichtsmessung (mit zwei Perioden) durchgeführt um die etwaigen Positionen festzustellen, an denen die Periodendauern für normales und gedrehtes Pendel gleich sind. Dabei wurde nach jeder Messung der schwingende Körper gedreht um systematische Fehler zwischen den beiden Messreihen klein zu halten. Nach den zwei Messungen wurde das bewegliche Gewicht um gleiche Abstandsänderungen, anhand angebrachter Ringmarken, verschoben.

2.2 Präzessionsmessung

Aus der Übersichtsmessung kamen, wie erwartet, zwei Positionen für das Gewicht heraus, an denen das Pendel die gleiche Periodendauer aufwies. Die Daten wurden grafisch aufgetragen um herauszufinden, wo der Schneidewinkel der beiden Graphen am größten ist. Für diese Position wurde eine Präzessionsmessung durchgeführt. Diese wurde nach dem Prinzip der Intervall-Schachtelung vollzogen. Dabei wurden die Feineinstellungen über das bewegliche Gewicht geführt, welche auseinander geschraubt werden konnte und somit sehr genau auf eine jeweilige Stellung gebracht werden konnte. Diese Einstellungen wurden übernommen um die Periode sehr genau zu vermessen, an der das Pendel die gleichen Zeiten aufwies. Damit wurde die Fallbeschleunigung errechnet.

2.3 Amplitudenmessung

Zu aller letzt wurden noch die Periodendauern in Abhängigkeit von dem Auslenkungswinkel ϕ_0 gemessen. Diese Werte konnten später herangezogen werden, um den Korrekturterm für die Periodendauer zu überprüfen. Dabei wurde die Auslenkung über ein Lineal festgestellt, welches den Wegunterschied bei der Auslenkung von der unteren Schneide gemessen hat. Durch geometrische Zusammenhänge konnte so die Auslenkung berechnet werden.

3 Fehlerberechnung/Messauswertung

3.1 Bestimmung des Schneideabstandes/reduzierte Pendellänge

Im Zustand des Reversionspendels, ist der Abstand zwischen den Aufhängungen (in unserem Fall den Schneiden) gleich der reduzierte Pendellänge l_r . Diese konnte über einen Anbauabstandsmesser gemessen werden. Dabei galt für den Fehler der Zusammenhang

$$u(l_0) = \sqrt{(u_l^{\text{statistisch}})^2 + (u_l^{\text{messung}})^2}$$

Dabei war der statistische Fehler der Vertrauensbereich und der Messfehler gleich der Messunsicherheit des Gerätes welche angegeben war mit $(0.02 \pm 0.00005 \cdot \bar{L})$ mm. Die tatsächliche Länge l ergab sich durch addieren der Dicke der Messgabel d welche angegeben war mit $d = (10.03 \pm 0.03)$ mm. Durch gauß'sche Fehlerfortpflanzung berechnet sich so die Unsicherheit für die Gesamtlänge zu:

$$u_l = \sqrt{u_g^2 + (u_l^{\text{statistisch}})^2 + (u_l^{\text{messung}})^2}$$

Die Gesamtlänge mit den Messwerten ist damit $l = l_r = (981.84 \pm 0.08)$ mm. Dabei muss angemerkt werden, dass im folgenden immer mit den ungerundeten Ergebnissen weiter verfahren wird.

3.2 Übersichtsmessung

Die Übersichtsmessung wurde jeweils immer mit einem Wegunterschied von zwei Ringmarken durchgeführt und das bei jeweils zwei Perioden. Das reicht um ein ausreichend genaues Bild über das Pendel zu erhalten.

Grafisch aufgetragen entsteht folgendes Bild:

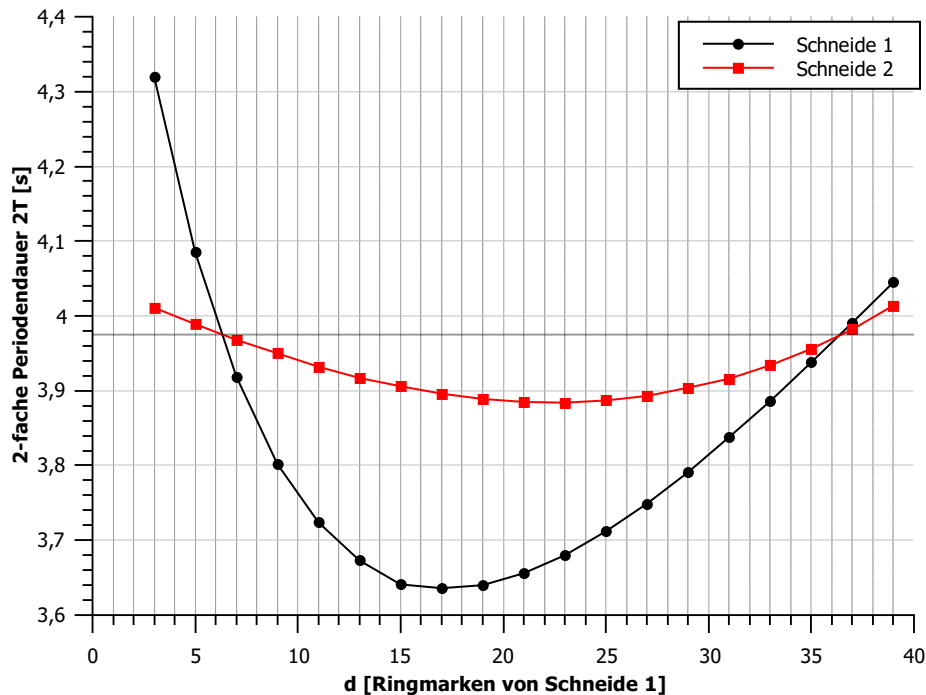


Abbildung 1: Zweifache Periodendauer in Abhängigkeit von der Stellung des beweglichen Gewichtes relativ zur ersten Schneide

Wie erwartet kann man zwei Schnittpunkte erkennen. Der mit dem größeren Winkel findet sich zwischen Ringmarke fünf und sieben. Somit ergibt sich, dass die Präzessionsmessung, welche als Intervallschachtelung durchgeführt wird bei Ringmarke sechs beginnt.

3.3 Präzisionsmessung

Wie erwähnt startet die Messung an Ringmarke sechs. Wie auch im Graphen zu sehen, ergibt die erste Messung, dass sich der Schnittpunkt zwischen der sechsten und siebten Marke befindet. Da jede genauere Verstellung nicht mehr über die Marken möglich ist, wird nun das Gewicht an der siebten Marke positioniert und angefangen es aufzuschrauben (Das aufschrauben relativ zur Schneide versetzt das Gewicht in eine insgesamt Position die zurück zur Ringmarke sechs führt). Dabei wird versucht den Unterschied der beiden Periodendauern ΔT zu minimieren.

Die Messwerte ergeben, dass nach 15 Drehungen der Unterschied circa gleich der Messunsicherheit ist. Durch wiederholtes Messen bestätigt sich dieser Wert, da innerhalb der Unsicherheiten das Vorzeichen von ΔT wechselt. Werden nun eine Regression über die benachbarten Punkte durchgeführt, entstehen zwei lineare Funktionen welche angenähert

den Schnittpunkt treffen sollten. Mathematisch gilt hierbei:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax + b \\
 g(x) &= cx + d \\
 x_s &= \frac{d - b}{a - c} \\
 \Rightarrow y_s = T_s &= a \frac{d - b}{a - c} + b \quad (1)
 \end{aligned}$$

Setzt man die erhaltenen Messwerte ein und führt sie über die beschriebene Regression und Berechnung entsteht folgender Graph:

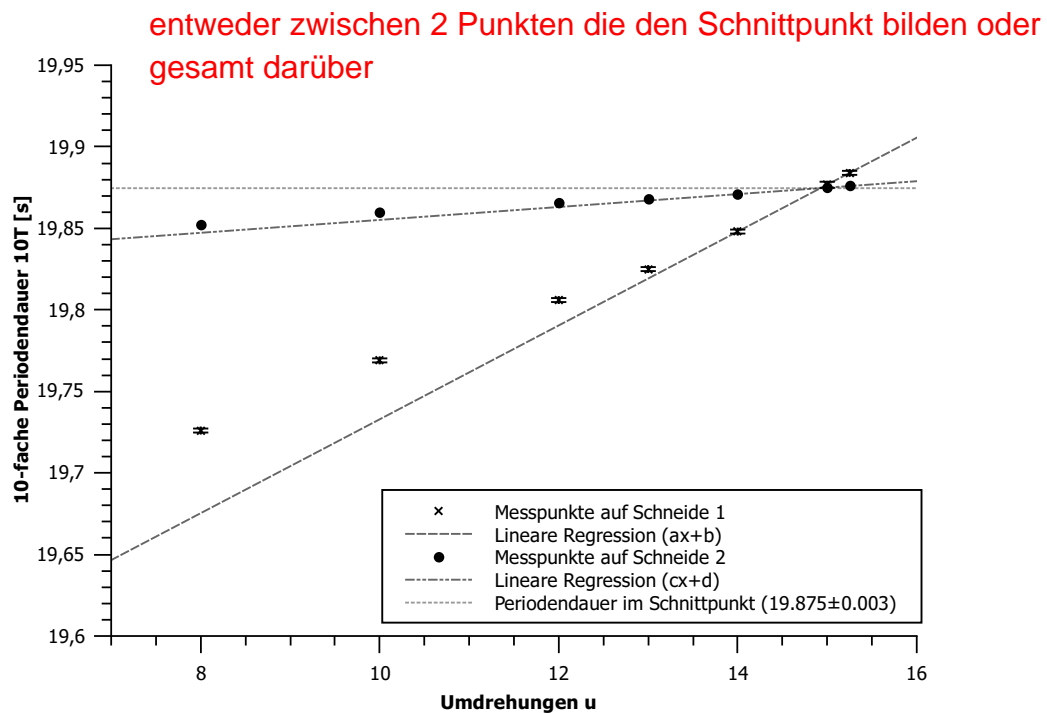


Abbildung 2: Präzessionsmessung der zehnfachen Periodendauer in Abhängigkeit zu den Umdrehungen

Für die Regressionen entwickelten sich folgende Werte:

$$a = (0.02878 \pm 0.00008)$$

$$b = (19.445 \pm 0.001)$$

$$c = (0.0040 \pm 0.0001)$$

$$d = (19.816 \pm 0.002)$$

Der ausgerechnete Schnittpunkt nach Formel 1 ($10 \cdot T_s = (19.875 \pm 0.003)s$) liegt in den oben erwähnten Punkten, welche durch reine Messung gefunden wurden. Betreibt man über diese Punkte Statistik, kann man ebenfalls den Schnittpunkt berechnen und mit den aus dem Graphen vergleichen. Es ergeben sich die Periodendauern zu:

- Relativ zur ersten Schneide: $10 \cdot T_1 = (19.8767 \pm 0.0019)s$
- Relativ zur letzten Schneide: $10 \cdot T_1 = (19.8748 \pm 0.0013)s$

wieso hängt der Schnittpunkt
von der Schneide ab?

woraus gebildet?

Über ein gewichtetes Mittel ($C_i = \frac{1}{u_i^2}$) errechnet sich der Schnittpunkt somit zu dem wesentlich genaueren Wert von $10 \cdot T_s = (19.8754 \pm 0.0011)\text{s}$. Da der statistisch errechnete Wert mit dem aus den regressierten Schnittgraden in den Unsicherheiten übereinstimmt, kann für die weitere Rechnung der statistische, genauere Wert benutzt werden.

3.4 Amplitudenmessung

Für die Startauslenkung wurde wie oben beschrieben ein Lineal verwendet, welches den Wegunterschied zur Ruhelage misst. Aus geometrischen Zusammenhängen ergibt sich, dass der Auslenkwinkel berechnet werden kann mit:

$$\phi_0 = \arctan\left(\frac{s_a}{l_r}\right) \quad (2)$$

wobei s_a der gemessene Wegunterschied ist und l_r die reduzierte Pendellänge. Der Fehler wird über die gaußsche Fehlerfortpflanzung bestimmt:

$$u_\phi = \sqrt{\left(u_s \cdot \frac{1}{L\sqrt{1 - \frac{s_a^2}{l_r^2}}}\right)^2 + \left(u_l \cdot \frac{s_a}{L^2\sqrt{1 - \frac{s_a^2}{l_r^2}}}\right)^2}$$

Die sechs Messwerte berechnet nach Formel 2 befinden sich in einem Intervall von circa 1.2° bis 7.0° .

Getestet wird folgende Relation:

$$T(\phi_0) = T \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\phi_0}{2}\right) + \dots\right) \quad (3)$$

Die Regression wird linear über den Zusammenhang $T = f(\phi^2)$ geführt womit sich die Form für die Regression mit $T \cdot \left(1 + \frac{x}{16}\right)$ ergibt wobei $x = \phi^2$.

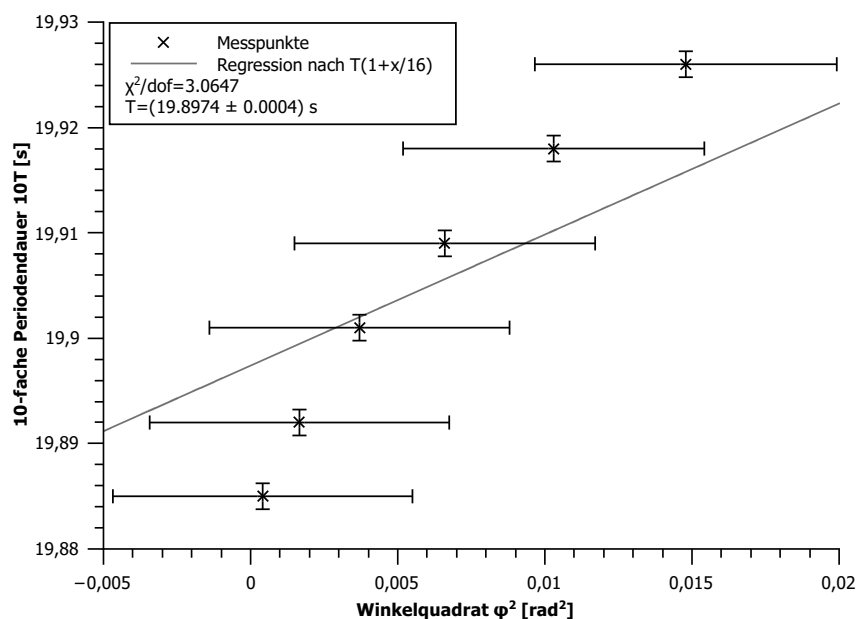


Abbildung 3: Zehnfache Periodendauer in Abhängigkeit vom Auslenkwinkelquadrat mit linearer Regression über $T \left(1 + \frac{x}{16}\right)$

Die großen Fehlerbalken haben ihren Ursprung an einem groß abgeschätzten Fehler für s_a mit $u_s = \pm 0.5\text{cm}$. Alles in allem scheint der Graph keine gute Abhängigkeit vom Modell zu zeigen. Allerdings befindet sich der χ^2 -Test noch in einem signifikanten Bereich von $\frac{\chi^2}{\text{dof}} \approx 3.1$. Trotz dessen kann keine genau Aussage über das zugrunde liegende Modell getroffen werden.

gilt es oder nicht?

3.5 Berechnung der Erdbeschleunigung

Für das Reversionspendel gilt der Zusammenhang:

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot l_r$$

Führt man nun die Korrekturterme für die Auftriebskraft und der endlichen Auslenkwinkel ein bekommt man folgende Formel:

$$g_c = \left(\frac{2\pi}{T(\phi_0)}\right)^2 \cdot l_r \cdot \left(1 + \frac{\phi_0^2}{\mathfrak{g}} + \frac{\rho_L}{\rho}\right) \quad (4)$$

wobei ρ_L die Dichte der Luft und ρ die des Pendels beschreiben. Für die Berechnung von g wurde auf den Korrekturterm für endliche Winkel verzichtet. Einerseits weil das Pendel in einer sehr kleinen Auslenkung gestartet wurde und andererseits weil der Term das Ergebnis kaum bis nicht präziser und ungenauer macht.

Die Fehler wurden über gauß'sche Fehlerfortpflanzung ermittelt. Es errechnet sich der Wert zu

DIN1333 !

$$\begin{aligned} g &= (9.8139 \pm 0.0013) \\ &= (9.814 \pm 0.001)\text{m/s}^2 \end{aligned}$$

Verglichen mit dem Literaturwert aus Quelle zwei¹ stimmen diese circa überein. Allerdings war eine genauere und vor allem präzisere Bestimmung zu erwarten welche leider nicht erreicht wurde.

4 Fehler-/Ergebniseinschätzung

Die Erdbeschleunigung hat ihre mindestens erwartete Genauigkeit von 10^{-3} bis 10^{-4} nicht erreicht. Dass kann mehrfache Gründe haben. Aber hauptsächlich sind systematische Messfehler anzunehmen. Ein Hauptaugenmerk sollte auch auf die vernachlässigte Korrektur für die endlichen Winkel gelegt werden. Dieser Term sollte g nach unten korrigieren aber hat keinen merklichen Einfluss auf das Ergebnis. Es liegt nahe, dass der abgeschätzte Winkel zu klein war. (Mit dieser Korrektur: $g_c = (9.814 \pm 0.006)\text{m/s}^2$)?

Eine weitere, wenn auch unwahrscheinliche Fehlerquelle könnte die thermische Ausdehnung bzw. Schwankung sein. Zwar sollte das Pendel in der Einstellung in der die Periodendauer genau bestimmt wurde, besonders unempfindlich gegen thermische Schwankungen sein allerdings ist auch hier mit Messfehlern zu rechnen welche das Ergebnis verfälschen können. Die Gültigkeit der Relation aus Formel 3 konnte nicht mit großer Signifikanz nachgewiesen werden. Hierbei vermute ich einen übersehenen Rechenfehler, da der Graph nach Augenmaß eher nichtlinearen Relationen entspricht.

~~Schlussendlich war das Experiment kein Erfolg und konnte nur sehr geringe Aussagen über Gültigkeit von Literaturwerten oder dem Modell der endlichen Winkelnäherung machen.~~

¹PTB: <http://www.ptb.de/cartoweb3/SISproject.php>

5 Anlagen/Aufgenommene Messwerte

5.1 Transkribierte Werte

- **Längenmessung** (in mm)

971.82	971.81	971.82	971.81	971.81
971.82	971.81	971.82	971.81	971.81

- **Übersichtsmessung**

Stellung	$2T_1$	$2T_2$	Stellung	$2T_1$	$2T_2$	Stellung	$2T_1$	$2T_2$
3	4.320	4.011	15	3.641	3.906	27	3.749	3.904
5	4.085	3.989	17	3.636	3.896	29	3.791	3.904
7	3.919	3.968	19	3.640	3.889	31	3.838	3.916
9	3.802	3.950	21	3.656	3.885	33	3.886	3.934
11	3.724	3.932	23	3.680	3.884	35	3.938	3.956
13	3.673	3.917	25	3.712	3.887	37	3.991	3.982
-	-	-	-	-	-	39	4.045	4.014

- **Präzessionsmessung** (geordnet)

Hier sind nur die benutzten Werte aufgelistet und neu geordnet! (Stellung 7)

Umdrehung	$10T_1$	$10T_2$	Delta
8	19.726	19.852	0.126
10	19.769	19.860	0.091
12	19.806	19.866	0.060
13	19.825	19.868	0.043
14	19.848	19.871	0.023
15	19.874	19.875	0.001
15	19.874	19.875	0.001
15	19.875	19.876	0.001
15	19.878	19.875	-0.003
15	19.876	19.873	-0.003
15	19.883	19.875	-0.008
15.25	19.884	19.876	-0.008

- **Winkelmessung**

Wegunterschied [cm]	$10T$
12.0 ± 0.5	19.926
10.0 ± 0.5	19.876
8.0 ± 0.5	19.909
6.0 ± 0.5	19.901
4.0 ± 0.5	19.892
2.0 ± 0.5	19.885

5.2 Messprotokoll

Reversionspendel
 Uhr: 30,9175 + $\frac{1s}{1d} \cdot t$
 $\frac{1s}{24 \cdot 1440 \text{min}} = \frac{1s}{86400s}$

längerenmessung: [mm]
 971,82 | 971,81 | 971,82 | 971,81 | 971,81 | 971,82
 971,81 | 971,81 | 971,82 | 971,81

Unsicherheit Schieber: $\pm(0,02 \pm 0,00005 \cdot L) \text{ mm}$ Gabel: $d = (10,03 \pm 0,03) \text{ mm}$

Messung 1:

Stück:	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
$2T_1$	4,320	4,085	3,919	3,802	3,724	3,673	3,647	3,636	3,640	3,656
$2T_2$	9,011	8,889	8,968	8,950	8,932	8,917	8,906	8,896	8,889	8,885
...	23	25	27	29	31	33	35	37	39	
...	3,680	3,712	3,749	3,791	3,838	3,886	3,938	3,991	4,045	
...	3,884	3,887	3,893	3,904	3,916	3,934	3,956	3,982	4,014	

Reihe 2 Intervall (Schubstiftung) ($130 = -1 \text{ Stück}$)

Stück	6/8	7/8	7/10	7/12	7/13	6/6	7/14	7/15
$20T_1$	19,992	19,726	19,769	19,806	19,825	19,944	19,848	19,874
$10T_2$	19,992	19,852	19,860	19,866	19,868	19,885	19,871	19,875
Δ	0,000	0,126	0,097	0,060	0,043	0,059	0,023	0,007

6/25 | 7/15,25
 $10T_1$ 19,992 | 19,884
 $10T_2$ 19,897 | 19,876
 Δ 0,101 | 0,008

Reihe 3
 12 cm | 10 cm | 8 cm | 6 cm | 4 cm | 2 cm
 19,926 | 19,918 | 19,909 | 19,901 | 19,892 | 19,885

Reihe 2 Fortsetzung 7/15

19,882	19,880	19,874	19,875	19,878	19,876	19,883
19,860	19,857	19,875	19,876	19,875	19,873	19,875
0,022	0,023	0,007	0,001	0,003	0,003	0,008

Falsch eingestellt

P.S.L.F.

6 Quellen

1. Script zum Grundpraktikum (Formeln, Versuchsbeschreibung)
2. PTB Wert der Erdbeschleunigung $g \approx (9.812614 \pm 0.000020) \text{ m/s}^2$
 abgerufen: 18.06.2015 13:00 - <http://www.ptb.de/cartoweb3/SISproject.php>